Задачи по курсу "Случайные процессы"

студентки группы 417
Новиковой Дарьи

Задача 1

Найти характеристическую функцию для случайной величины x , имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2.

Решение.
Характеристическая функция равна:

$$\varphi(t) = Ee^itx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{itx} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Преобразуем выражение:

$$itx - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} = itx - \frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{xa}{\sigma^2} - \frac{a^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 2itx + 2\frac{xa}{\sigma^2} + \frac{a^2}{\sigma^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 2\frac{x}{\sigma}\left(it\sigma - \frac{a}{\sigma}\right) + \left(it\sigma - \frac{a}{\sigma}\right)^2\right) + \frac{1}{2} i^2 t^2 \sigma^2 + ita =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma} - it\sigma + \frac{a}{\sigma}\right)^2 - \frac{1}{2} t^2 \sigma^2 + ita$$

Обозначим $y = \frac{x}{\sigma} - it\sigma + \frac{a}{\sigma}$, тогда $dy = \frac{dx}{\sigma}$ и $dx = \sigma dy$.
При такой замене характеристическая функция примет вид:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}t^2\sigma^2 + ita} \sigma dy = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{ita-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ita-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \sqrt{2\pi} \; = e^{ita-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

.

Задача 2

Пусть $x_n, n \in N$ независимые случайные величины,имеющие общее равномерное распределение на отрезке $[a,b]$. I_t-индикаторная функция отрезка $[a,b]$. Рассмотрим $x_t = \sum\limits_{n=1}^{N} I_t[x_n]$,где $t \in [a,b]$, а N-пуассоновская случайная величина. Доказать,что x_t - случайная величина.

Доказательство.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Докажем,что x_t - измеримая функция, т.е. докажем, что событие
$\{x_t < x\} \in \mathcal{F}$
Проведем несколько предварительных рассуждений:
1.По условию задачи x_n - случайная величина. Докажем, что $I_t[x_n]$ - тоже случайная величина.
Для этого докажем,что событие $\{I_t[x_n] < x\} \in \mathcal{F}$.
Если $x > 1$, то $\{I_t[x_n] < x\} = \Omega \in \mathcal{F}$ (по определению $\mathcal{F}$);
если $x \leqslant 0$, то $\{I_t[x_n] < x\} = \emptyset \in \mathcal{F}$ (по определению $\mathcal{F}$).
Проверим случай, когда $x \in (0,1]$.
По определению индикаторной функции

$$I_t[x_n] = \begin{cases} 0, & \text{если } x_n \geqslant t \\ 1, & \text{если } x_n \leqslant t. \end{cases}$$

Следовательно $\{I_t[x_n] < x\} = \{x_n > t\} = \{w : x_n(w) \in (t, +\infty)\} \in \mathcal{F}$.
Обозначим $\xi_n = I_t[x_n]$. Итак, мы показали ,что $\{w : \xi_n(w) \in (-\infty, x)\} \in \mathcal{F}$ для $\forall x$

Покажем, что $\xi_n(A) \in \mathcal{F}$ для $\forall A \in \mathcal{B}$ (т.е. любое борелевское множество переводит в подмножество сигма-алгебры):

$\circ$ $\xi_n^{-1}(A \cap B) = \{w : \xi_n(w) \in A \cap B\} = \{w : \xi_n(w) \in A\} \cap \{w : \xi_n(w) \in B\} = \xi_n^{-1}(A) \cap \xi_n^{-1}(B)$

$\circ$ $\xi_n^{-1}(\bar{A}) = \{w : \xi_n(w) \in \bar{A}\} = \{w : \xi_n(w) \in R \backslash A\} = \overline{\xi_n^{-1}(A)}$

$\circ$ $\xi_n^{-1}(A \bigcup B) = \xi_n^{-1}(\overline{\bar{A} \bigcap \bar{B}}) = \overline{\xi_n^{-1}(\bar{A}) \bigcap \xi_n^{-1}(\bar{B})} = \overline{\overline{\xi_n^{-1}(A)} \bigcap \overline{\xi_n^{-1}(B)}} = \xi_n^{-1}(A) \bigcup \xi_n^{-1}(B)$

$\circ$ $\xi_n^{-1}(\bigcap\limits_n A_n) = \{w : \xi_n(w) \in \bigcap\limits_n A_n\} = \bigcap\limits_n \{w : \xi_n(w) \in A_n\} = \bigcap\limits_n \xi_n^{-1}(A_n)$

Равенство

$\circ$ $\xi_n^{-1}(\bigcup\limits_n A_n) = \bigcup\limits_n \xi_n^{-1}(A_n)$ следует из вышедоказанного и правила де Моргана : $\bigcup\limits_n A_n = \overline{\bigcap\limits_n \bar{A}_n}$.

Т.к. $\mathcal{B} = \sigma(-\infty, x)$, то ξ_n^{-1} переводит любое борелевское множество в подмножество сигма-алгебры, значит ξ_n является измеримой функцией $\Rightarrow$ случайной величиной.

2. $\xi_n = I_t[x_n]$ - случайная величина. Докажем, что $\sum\limits_{n=1}^{N} \xi_n$ тоже случайная величина. Введем обозначение $\eta_k = \sum\limits_{n=1}^{k} \xi_n$.Докажем,что η_N случайная величина.

2.1Докажем, что сумма двух случайных величин $\xi_1+\xi_2$ есть случайная величина, т.е.$\{\xi_1 + \xi_2 < \alpha\} \in \mathcal{F}$ Для этого докажем

$$\{\xi_1 + \xi_2 < \alpha\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\xi_1 < r_i\} \bigcap \{\xi_2 < \alpha - r_i\} \;\; r_i \in \mathcal{Q}$$

Доказательство:докажем вложенность событий друг в друга

вложенность $\subseteq$:

$w \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{\xi_1 < r_i\} \bigcap \{\xi_2 < \alpha - r_i\} \Rightarrow w : \xi_1(w) < r_i, \xi_2(w) < \alpha - \xi_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow w : \xi_1(w) + \xi_2(w) < \alpha$

вложенность $\supseteq$:

$w \in \{\xi_1 + \xi_2 < \alpha\} \Rightarrow w : \xi_1(w) + \xi_2(w) < \alpha$

$\xi_1(w) < \alpha - \xi_2(w)$

В открытом множестве $(\xi_1(w), \alpha - \xi_2(w))$ существует рациональная точка $r_j : \xi_1(w) < r_j$ и $\xi_2(w) < \alpha - r_j$

$\Longrightarrow \{\xi_1 + \xi_2 < \alpha\} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{\xi_1 < r_i\} \bigcap \{\xi_2 < \alpha - r_i\}$

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{\xi_1 < r_i\} \bigcap \{\xi_2 < \alpha - r_i\} \in \mathcal{F}$ в силу замкнутости относительно операций замыкания и счетного объединения $\Rightarrow \{\xi_1 + \xi_2 < \alpha\} \in (F) \Rightarrow$ $\xi_1 + \xi_2$ случайная величина.

2.1 По индукции легко доказывается,что сумма $\sum\limits_{n=1}^{k} \xi_n$ является случайной величиной

2.2 Итак,мы доказали,что $\eta_k = \sum\limits_{n=1}^{k} \xi_n$ случайная величина.
$\eta_N = I[N = k]\eta_k$
Событие $\{I[N = k]\eta_k < x\} = \{N \in \{k\}\} \bigcap \{\eta_k \in (-\infty, x)\} \bigcup \{\overline{N \in \{k\}}\} \Rightarrow$ $\{I[N = k]\eta_k < x\} \in \mathcal{F}\ \forall x \Rightarrow$ функция $\eta_N = I[N = k]\eta_k$ измерима,а значит,является случайной величиной,т.е x_t случайная величина.

Утверждение доказано.

Задача 3

Доказать, что для функций Хаара $H_n(t),\ t \in [0, 1],\ n = 0, 1, 2, \ldots$ верно равенство

$$\int\limits_0^1 H_k(t) \cdot H_m(t)dt = \begin{cases} 1, & \text{если } k = m \\ 0, & \text{если } k \neq m \end{cases}$$

Доказательство.
Общий вид функций Хаара:
для $2^n \leq k < 2^{n+1}$

$$H_k(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \frac{k-2^n}{2^n} \leqslant t \leqslant \frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n} \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n} < t \leqslant \frac{k-2^n+1}{2^n} \\ 0, & \text{в остальных точках} \end{cases}$$

Обозначим $a = \dfrac{k-2^n}{2^n}$, $b = \dfrac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n}$, $c = \dfrac{k-2^n+1}{2^n}$.

1). Пусть $k = m$. Тогда

$$\int\limits_0^1 H_k(t) \cdot H_m(t)dt = \int\limits_0^1 H_k^2(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^a H_k^2(t)dt + \int\limits_a^b H_k^2(t)dt + \int\limits_b^c H_k^2(t)dt + \int\limits_c^1 H_k^2(t)dt =$$

$$= \int\limits_a^b H_k^2(t)dt + \int\limits_b^c H_k^2(t)dt =$$

$$= \frac{(k-2^n+\frac{1}{2})-(k-2^n)}{2^n}\cdot 2^n + \frac{(k-2^n+1)-(k-2^n+\frac{1}{2})}{2^n}\cdot 2^n = 1$$

2). Пусть $k \neq m$. Не ограничивая общности будем считать, что $k < m$. Т.к. $k, m \in \mathbb{N}$, то m можно представить в виде $m = k + l,\ l \in \mathbb{N}$. Отсюда наглядно видно, что сегменты

$$\Delta_k = \left[\frac{k-2^n}{2^n},\ \frac{k-2^n+1}{2^n}\right] \text{ и } \Delta_m = \left[\frac{k+l-2^n}{2^n},\ \frac{k+l-2^n+1}{2^n}\right],$$

на которых функции Хаара $H_k(t)$ и $H_m(t)$ соответственно отличны от нуля, пересекаются не более, чем в одной точке (т.е. на множестве меры 0). Следовательно, на всем сегменте $[0,1]$, за исключением множества меры 0, хотя бы один из сомножителей подынтегральной функции (а значит, и вся подынтегральная функция) обращается в 0. Интеграл от функции, равной 0 почти всюду на сегменте $[0,1]$, равен 0.

Утверждение доказано.

Задача 4

Доказать неравенство

$$\left|e^{i\alpha\lambda} - e^{i\beta\lambda}\right| \le |\lambda|\cdot|\beta-\alpha|$$

Доказательство.
Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что $\beta > \alpha$. Проведем преобразования левой части неравенства:

$$\left|e^{i\alpha\lambda} - e^{i\beta\lambda}\right| = \left|i\lambda\int\limits_\alpha^\beta e^{i\lambda z}dz\right| = |i||\lambda|\left|\int\limits_\alpha^\beta e^{i\lambda z}dz\right| \le |\lambda|\int\limits_\alpha^\beta \left|e^{i\lambda z}\right|dz =$$

$$= |\lambda|\int\limits_\alpha^\beta dz = |\lambda|(\beta-\alpha).$$

Утверждение доказано.

Задача 5

Доказать, что отображение $(f,g)=\int\limits_0^1 f(t)g(t)dt,$ где $f(t), g(t) \in L_2(0,1)$ есть скалярное произведение в пространстве $L_2(0,1)$.

Доказательство.
Достаточно проверить выполнение аксиом скалярного произведения.

$\forall f(t), g(t), h(t) \in L_2(0,1),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

1. $(f,g)=(g,f)$. Эта аксиома выполнена, т.к. значение интеграла Лебега не зависит от порядка сомножителей в подынтегральной функции.

2. $(f+g,h)=(f,h)+(g,h)$. Эта аксиома выполнена в силу аддитивности интеграла. Действительно,

$$\int\limits_0^1 (f(u)+g(u))h(u)du = \int\limits_0^1 (f(u)h(u)+g(u)h(u))du = \int\limits_0^1 f(u)h(u)du + \int\limits_0^1 g(u)h(u)du$$

3. $(\lambda f,g)=\lambda(f,g)$. Эта аксиома выполнена в силу свойств интеграла Лебега (возможности вынесения константы из-под знака интеграла).

4. $(f,f)\geq 0,$ причем $(f,f)=0 \Leftrightarrow f=0$. Выполнение этой аксиомы также следует из свойств интеграла Лебега: интеграл от неотрицательной функции, не обращающейся в 0 на всем отрезке $[0,1]$, за исключением, быть может, множества меры 0, положителен. Интеграл Лебега от функции, равной 0 всюду на отрезке $[0,1]$, равен 0.

Итак, для рассматриваемого отображения выполнены все аксиомы скалярного произведения. Следовательно, оно является скалярным произведением в пространстве $L_2(0,1)$.

Утверждение доказано.

Задача 6

Доказать, что скалярное произведение в произвольном гильбертовом пространстве есть непрерывная функция своих аргументов.

Доказательство.
Норма в гильбертовом пространстве H определена как $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$. Пусть даны две сходящиеся последовательности элементов гильбертова пространства $H : \{x_n\}$ и $\{y_m\}$. Сходимость в гильбертовом пространстве H означает, что $\exists\ x, y \in H : \|x_n - x\| -_{n\to\infty} \to x,\ \|y_m - y\| -_{m\to\infty} \to y$.

Для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что $(x_n, y_m) -_{n,m\to\infty} \to (x, y)$.

$$|(x_n, y_m) - (x, y)| = |(x_n, y_m) - (x, y_m) + (x, y_m) - (x, y)| \le$$
$$\le |(x_n, y_m) - (x, y_m)| + |(x, y_m) - (x, y)| = |(x_n - x, y_m)| + |(x, y_m - y)| \le$$
$$\le \{ \text{ неравенство Коши-Буняковского } \} \le \|x_n - x\| \cdot \|y_m\| + \|y_m - y\| \cdot \|x\|.$$

Устремим в полученном выражении m и n к бесконечности:

$$\|x_n - x\| \cdot \|y_m\| + \|y_m - y\| \cdot \|x\| -_{n,m\to\infty} \to \|x - x\| \cdot \|y\| + \|y - y\| \cdot \|x\| = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ (x_n, y_m) -_{n,m\to\infty} \to (x, y).$$

Утверждение доказано.

Задача 7

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определен случаный процесс $X_t,\ t \in [0,\ +\infty)$, причем $\mathbf{P}\{X_0 = 0\} = 1$; и выбраны произвольные неотрицательные числа $t_0, t_1, \ldots, t_n$, упорядоченные по возрастанию: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.

Доказать, что для характеристической функции случайного вектора $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ верно равенство

$$\mathbb{E}e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} u_k X_{t_k}} = \mathbb{E}e^{i\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sum\limits_{r=k+1}^{n} u_r (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})}. \qquad (*)$$

Доказательство.

Достаточно показать, что степени экспонент под знаком математического ожидания равны. Докажем это по индукции.

n=1: покажем, что

$$\sum_{k=1}^{1} u_k X_{t_k} = \sum_{k=0}^{0} \sum_{r=k+1}^{1} u_r (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) \ .$$

Раскроем сумму в правой части равенства. Получим $u_1(X_{t_1} - X_{t_0})$. По условию задачи, $t_0 = 0$, следовательно, $\mathbf{P}\{X_{t_0} = 0\} = 1$ и поэтому выражение в правой части равно $u_1 X_{t_1}$, что, очевидно, совпадает со значением суммы в левой части выражения.

Пусть равенство (*) верно при некотором n.

n→n+1: преобразуем правую часть равенства:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{r=k+1}^{n+1} u_r (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) = \{\text{выделим последнее слагаемое из внешней суммы}\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=k+1}^{n+1} u_r (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) + u_{n+1}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n}) =$$

$$= \{\text{выделим последнее слагаемое из внутренней суммы}\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=k+1}^{n} u_r (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) + \sum_{k=0}^{n-1} u_{n+1}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) + u_{n+1}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u_k X_{t_k} + u_{n+1} \sum_{k=0}^{n} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) =$$

$$= \{\text{воспользуемся предположением индукции}\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u_k X_{t_k} + u_{n+1}(X_{t_{n+1}} - X_{t_0}) = \{X_{t_0} = 0\} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k X_{t_k} \ .$$

Т.е. пришли к левой части равенства.

Утверждение доказано.

Задача 8

Пусть $w_t,\ t \in [0, +\infty)$ - случайный процесс.
Доказать, что $\forall\ t_k,\ \upsilon \in [0, +\infty)$ верно равенство:

$$w_{t_k} - w_{\upsilon \wedge t_k} = w_{\upsilon + (t_k - \upsilon)^+} - w_\upsilon, \qquad (**)$$

где $a \wedge b = min(a, b),\ a^+ = max(0, a)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть два случая:

1). $t_k \leq \upsilon$. Тогда $t_k \wedge \upsilon = t_k,\ (t_k - \upsilon)^+ = 0$. Следовательно, в левой части равенства (7) будет $w_{t_k} - w_{t_k} \equiv 0$, а в правой части $w_\upsilon - w_\upsilon \equiv 0$.

2). $t_k > \upsilon$. Тогда $t_k \wedge \upsilon = \upsilon,\ (t_k - \upsilon)^+ = t_k - \upsilon$. Следовательно, в левой части равенства (7) получим $(w_{t_k} - w_\upsilon)$, а в правой части $w_{\upsilon + t_k - \upsilon} - w_\upsilon \equiv w_{t_k} - w_\upsilon$.

Нетрудно видеть, в обоих случаях равенство (**) верно.
Утверждение доказано.